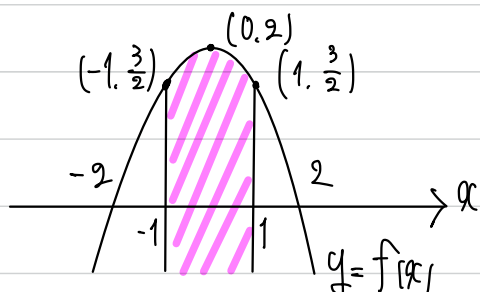


$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$g(x) = |x^2 + a| \text{ とおく.}$$

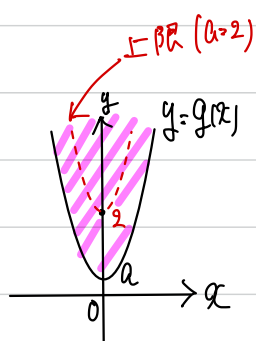
$y \leq f(x)$ かつ $-1 \leq x \leq 1$ の領域は



$y \geq g(x)$ のグラフは

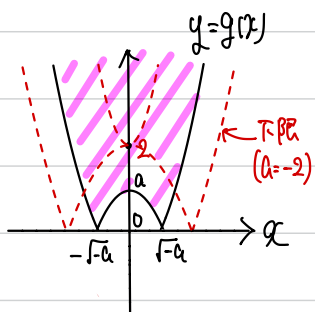
• $a \geq 0$ の場合

下に凸の放物線の
上側



• $a \leq 0$ の場合

下に凸の放物線の
 $y \leq 0$ を $y \geq 0$ に
折り返したグラフの上側



これを踏まえて

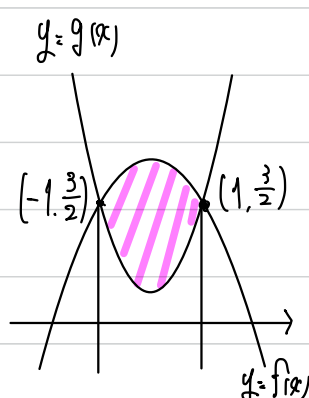
$y \leq f(x)$ かつ $y \geq g(x)$ かつ $-1 \leq x \leq 1$
の領域を、場合分けして描いていく。

場合分けの前に、分岐する a の値を調べる。

• $y = g(x)$ が $(\pm 1, \frac{3}{2})$ を
通る時。

$$y = |x^2 + a| \text{ に代入して}$$

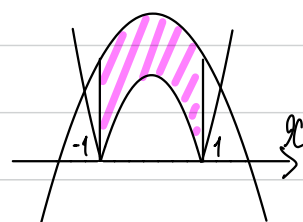
$$\frac{3}{2} = |1 + a| \quad \underline{a = -\frac{1}{2}}$$



• $y = g(x)$ が $(\pm 1, 0)$ を通る
とき。

$$y = |x^2 + a| \text{ に代入して}$$

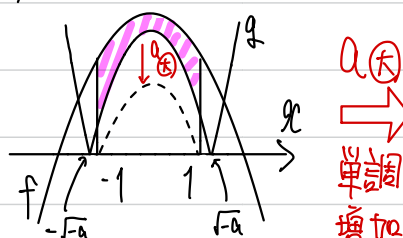
$$0 = |1 + a| + 2 = a = -1$$



以上から、 $a = -1, 0, \frac{1}{2}$ のときに場合分け
が必要。

以下、略図を描きながら、増減を調べる。

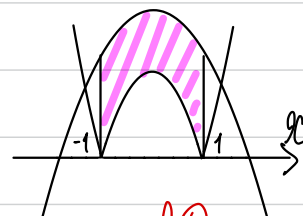
(i) $-2 \leq a < -1$ のとき



a が
単調
増加

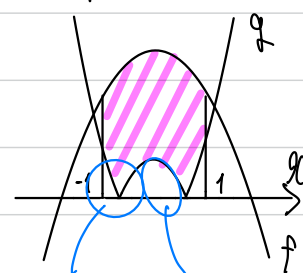
a が大きくなると、
面積が増える

(ii) $a = -1$



a が
増減
不明

(iii) $-1 < a < 0$ のとき



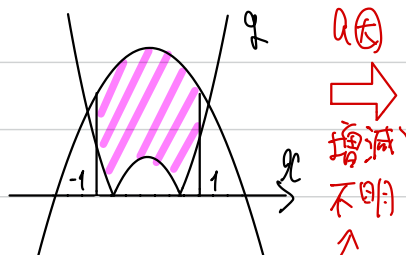
a が大きくなると
新たに発生した
面積

a が大きくなると、
面積が増える所と、
減る所がある

2025年

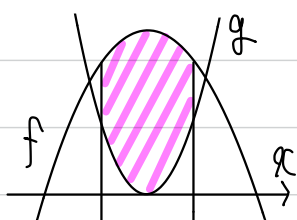
東大数学

文系第4問②

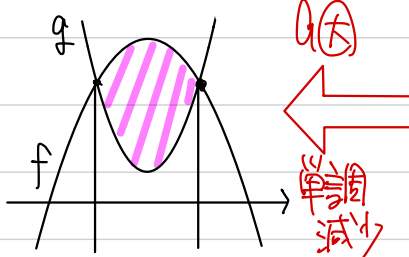
(iii) $-1 < a < 0$ のとき

「」も、同じ理由で
増減不明

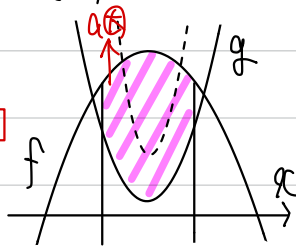
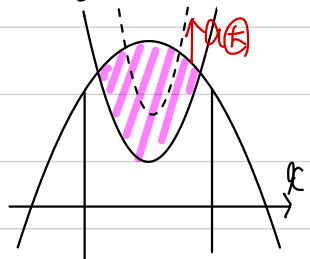
$a \uparrow$
増減不明

(iv) $a = 0$ のとき

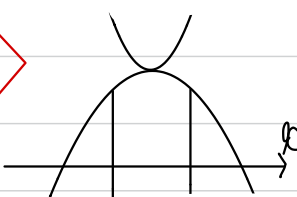
$a \uparrow$
単調減少

(vi) $a = \frac{1}{2}$ のとき

$a \uparrow$
単調減少

(v) $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき(vii) $\frac{1}{2} < a < 2$ のとき

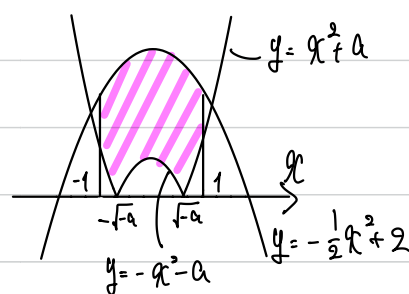
$a \uparrow$
単調減少

(viii) $a = 2$ のとき

増減表

a	-2	...	-1	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...	2
$S'(a)$	+		?		-		-		-
$S(a)$									

$-1 < a < 0$ で最大値をとるはず。

よ、 $-1 < a < 0$ のときの面積だけ計算する。

$$S(a) = \int_{-1}^{-\sqrt{a}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - (x^2 + a) dx \quad I_1 \text{ とする}$$

$$+ \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - (-x^2 - a) dx \quad I_2 \text{ とする}$$

$$+ \int_{\sqrt{a}}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - (x^2 + a) dx \quad I_3 \text{ とする}$$

• η が y 軸対称な $I_1 = I_3$

$$I_2 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2}x^2 + a + 2 \right) dx$$

積分の中身は
偶関数。

$$= 2 \int_0^{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2}x^2 + a + 2 \right) dx \quad I_4$$

と変形できる
ので、

$$S(a) = 2I_3 + 2I_4$$

$$I_3 = \int_{\sqrt{a}}^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 - a + 2 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^3 + (-a+2)x \right]_{\sqrt{a}}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - a + 2 \right) - \left(\frac{1}{2}a\sqrt{a} + (-a+2)\sqrt{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{a} - a - 2\sqrt{a} + \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^{\sqrt{-a}} \left(\frac{1}{2}x^2 + a + 2 \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{6}x^3 + (a+2)x \right]_0^{\sqrt{-a}} \\
 &= \left\{ -\frac{1}{6}a\sqrt{-a} + (a+2)\sqrt{-a} \right\} - \left\{ \frac{1}{6} \times 0 + (a+2) \times 0 \right\} \\
 &= \frac{5}{6}a\sqrt{-a} + 2\sqrt{-a}
 \end{aligned}$$

よ、2

$$\begin{aligned}
 S(a) &= 2I_3 + 2I_4 \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2}a\sqrt{-a} - a - 2\sqrt{-a} + \frac{3}{2} \right) \\
 &\quad + 2 \left(\frac{5}{6}a\sqrt{-a} + 2\sqrt{-a} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3}a\sqrt{-a} - 2a + 3$$

$\sqrt{\bullet}$ を含む関数は
 微分できない。
 次数を上げるために、
 $\sqrt{-a} = t$ なることをおく。
 $(a = -t^2)$

$$\sqrt{-a} = t \text{ とおく.}$$

$$-1 < a < 0 \text{ なる } a \text{ に対して } 0 < t < 1$$

$$\begin{aligned}
 S(a) &= \frac{8}{3}(-t^2) \times t - 2(-t^2) + 3 \\
 &= -\frac{8}{3}t^3 + 2t^2 + 3 = T(t) \text{ とおく.}
 \end{aligned}$$

$$T'(t) = -8t^2 + 4t$$

$$= -4t(2t-1)$$

t	0	$\frac{1}{2}$	1	
$T'(t)$	0	+	0	-
$T(t)$		$\nearrow$	$\frac{19}{6}$	$\searrow$

最大

最大

よ、2

$$S(a) \text{ の最大値は } \frac{19}{6}$$

$$\begin{aligned}
 T\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{8}{3} \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \\
 &= \frac{19}{6}
 \end{aligned}$$

オマケ

 $-2 < a < -1$ で単調増加 $0 < a < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < a < 2$ で単調減少 になるのは本当か?

計算してみよう。

(i) $-2 < a < -1$ のとき.

$$S(a) = \int_{-1}^1 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - \left(-x^2 - a \right) \right\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + a + 2 \right) dx$$

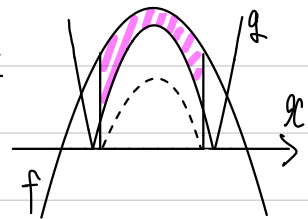
$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + a + 2 \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{6}x^3 + (a+2)x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + 2a + 4 = 2a + \frac{13}{3}$$

傾き正

確かに単調増加



(ii) $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

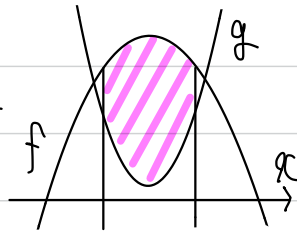
$$S(a) = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - (x^2 + a) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 - a + 2 \right) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 - a + 2 \right) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{2}x^3 + (-a+2)x \right]_0^1$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2} - a + 2 \right) = -2a + 3 \quad \text{1次関数 傾き負}$$

確かに単調減少

$$= \frac{1}{4} (2a)^3 = 2a^3$$

$$= 2 \times \left(\frac{-2a+4}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{ここで } a = \frac{2(-a+2)}{3} \text{ を代入}$$

 $\frac{1}{2} < a < 2$ では $-2a+4$ は単調減少よって $(-2a+4)^{\frac{3}{2}}$ も単調減少よって $S(a)$ も確かに
単調減少※ $y = x^{\frac{3}{2}}$ と $y = x$ は $x > 0$ で
増減が一致

以上より、

 $-2 < a < -1$ で単調増加 $0 < a < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < a < 2$ で単調減少

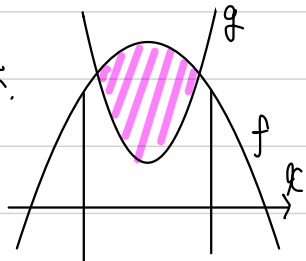
になることが確かめられた。

(iii) $\frac{1}{2} < a < 2$ のとき $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点は、

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2 = x^2 + a$$

$$\frac{3}{2}x^2 = -a + 2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2(-a+2)}{3}} \quad \sqrt{\frac{2(-a+2)}{3}} = a \text{ とおく}$$



$$S(a) = \int_{-a}^a \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - (x^2 + a) dx$$

$$= \int_{-a}^a -\frac{3}{2}(x-a)(x+a) dx$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{6} \left\{ a - (-a) \right\}^3$$